

Πραγματική Ανάλυση - Ιούλιος 2024

Θέμα 1. [0,8+1,4=2,2 μον.]

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα του Dini.

Θέμα 2. [0,7+0,7+0,8=2,2 μον.]

- (i) Να δοθεί ο ορισμός της κατά σημείο και της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας πραγματικών συναρτήσεων. Ποια είναι η διαφορά τους;
- (ii) Να βρεθεί μια ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο $[0, 1]$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη μηδενική συνάρτηση, αλλά κάθε όρος της να είναι συνάρτηση ασυνεχούς παντού στο $[0, 1]$.
- (iii) Να βρεθεί μια ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων ορισμένων στο $[0, 1]$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα, αλλά η ακολουθία των παραγώγων της να μη συγκλίνει κατά σημείο.

Θέμα 3. [1,1+1,1=2,2 μον.] Ναδειχθεί ότι η σειρά McLaurin της e^x συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αλλά δε συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 4. [2,2 μον.]

Έστω μια ακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ομοιόμορφα φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων σε διάστημα $[a, b]$. Αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]$$

Ναδειχθεί ότι η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θέμα 5. [1,1+1,1=2,2 μον.]

- (i) Ναδειχθεί ότι ο γραμμικών χώρος που παράγεται από τις συναρτήσεις x^n , $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}_0$ είναι μία άλγεβρα συναρτήσεων που διαχωρίζει τα σημεία του $[0, 1]$.
- (ii) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

ναδειχθεί ότι $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$. [Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $\int_0^1 f(x)P(x) dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ και εφαρμόστε το Θεώρημα Stone - Weierstrass].